

Análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo via restrições quadráticas integrais

Thiago M Sardinha*, Alberto M Simões
Instituto Militar de Engenharia
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270,
Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

RESUMO: Este trabalho trata da análise de estabilidade de sistemas lineares com atraso variante no tempo a partir da teoria de Restrições Quadráticas Integrais. Em particular, a análise de estabilidade considerando-se a combinação cônica de diferentes multiplicadores para o operador atraso de interesse é comparada com a análise via uma condição de ganho pequeno considerando-se o atraso como uma dinâmica linear incerta variante no tempo e de ganho limitado. Duas aplicações numéricas permitem comparar o conservadorismo das abordagens.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas com atraso. Restrições Quadráticas Integrais. Atraso variante no tempo.

ABSTRACT: This work discusses stability analysis of linear systems with time-varying delay via the Integral Quadratic Constraint (IQC) theory. In particular, the stability analysis considering a conic combination of different multipliers for the delay operator of interest is compared to the analysis via a small gain condition where the time delay is considered as an uncertain linear time-varying dynamics with bounded gain. Two numerical applications allow to compare conservativeness in both approaches.

KEYWORDS: Time delay systems. IQC. Time-varying delay.

1. INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade de sistemas com atraso incerto é objeto de estudo há bastante tempo [1][2]. Sabe-se que a presença de atrasos no sistema pode degradar significativamente a resposta transitória, ou até mesmo levar à instabilidade. Muitas das vezes, o atraso decorre de uma limitação física, onde a disponibilização da informação em várias partes do sistema ao mesmo tempo não é possível [3]. Há diversos sistemas que apresentam esse tipo de fenômeno devido às suas características intrínsecas, tais como linhas de transmissão em sistemas elétricos, redes pneumáticas e hidráulicas em sistemas mecânicos, ou ainda processos químicos [4]. Em casos críticos como o de sistemas distribuídos, a robustez em relação ao tempo de atraso deve ser explicitamente abordada [5].

Dentre as ferramentas disponíveis na literatura para a análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo, destaca-se a análise via Restrições Quadráticas Integrais introduzida por [6], mais comumente conhecida como análise IQC (do inglês, Integral Quadratic Constraints). O ferramental IQC constitui uma ferramenta poderosa para a análise de sistemas dinâmicos complexos potencialmente contendo elementos não-lineares, incertos, ou, como no presente caso, atrasos. A teoria IQC é tão flexível e geral que ela compreende como casos particulares, por exemplo, a chamada análise- μ para sistemas incertos [7], ou ainda o problema da estabilidade absoluta para sistemas com não-linearidades do tipo limitadas em setor [8].

O cerne da abordagem IQC consiste em se identificar restrições quadráticas integrais satisfeitas pelo operador de interesse. Em [6] são apresentadas algumas restrições para o operador de interesse modelando o atraso no presente trabalho. Em [9], o problema da análise de estabilidade para sistemas com atraso variante no tempo via IQC é mais profundamente discutido.

Em [10], é discutida uma abordagem um pouco diferente para o problema da análise de estabilidade de sistemas com atraso. Nesse trabalho, a ideia central consiste em se tratar o atraso como uma dinâmica linear variante incerta no tempo. O critério de estabilidade é, então, obtido a partir da aplica-

ção de uma condição clássica de ganho pequeno.

O objetivo principal do presente trabalho é discutir a análise de sistemas lineares com atraso variante no tempo via o formalismo IQC, em particular mostrando que a abordagem do tipo ganho pequeno em [10] pode ser encontrada equivalentemente a partir do ferramental IQC. Dois exemplos numéricos apresentados permitem mostrar a flexibilidade da formulação IQC de [9] ao mesmo tempo que permitem dimensionar o conservadorismo na abordagem do tipo ganho pequeno em [10].

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 são apresentados os fundamentos da análise de estabilidade via restrições quadráticas integrais. A análise de estabilidade via IQC no caso particular de sistemas com atraso é discutida em seguida na Seção 3. Na Seção 4, é discutido como a abordagem do tipo ganho pequeno de [10] relaciona-se com o formalismo IQC. Por fim, na Seção 5 são apresentadas duas aplicações numéricas ilustrando os pontos discutidos anteriormente. Uma versão para conferência do presente artigo foi publicada no CBA 2018.

Notação: Os símbolos \mathbb{R} , \mathbb{R}^m e $\mathbb{R}^{n \times m}$, representam o conjunto dos números reais, o vetor coluna real com m elementos e a matriz real com n linhas e m colunas; \mathbb{C} e \mathbb{C}^0 o conjunto dos números complexos e o eixo dos números complexos; \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n o conjunto das matrizes simétricas e Hermitianas de ordem n , respectivamente. As notações \mathbf{L}_2^m e \mathbf{L}_{2e}^m denotam o espaço das funções quadraticamente integráveis, com coeficientes em \mathbb{R}^m , definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$ e o espaço \mathbf{L}_2^m estendido, respectivamente. A notação \mathbf{RL}_∞ denota o conjunto de funções racionais próprias com coeficientes reais sem polos no eixo imaginário, enquanto que \mathbf{RH}_∞ denota o subespaço de \mathbf{RL}_∞ , conjunto de funções racionais próprias com coeficientes reais sem polos no semiplano direito complexo; $\mathbf{RL}_\infty^{m \times n}$ e $\mathbf{RH}_\infty^{m \times n}$ denotam, respectivamente, o conjunto das matrizes m por n com elementos em \mathbf{RL}_∞ e \mathbf{RH}_∞ . A notação $\hat{y}(j\omega)$ denota a transformada de Fourier de um dado sinal $y(t)$. O limite mínimo e máximo de f sobre o conjunto E

são representados por $\inf_{x \in E} f(x)$ e $\sup_{x \in E} f(x)$, respectivamente. A notação $g \circ f$ é a função composta de g com f . Dada uma matriz M , M^t é a sua transposta, M^H a transposta conjugada, se $M \in \mathbb{H}^n$, a notação $M > 0$ (" \geq ", " $<$ ", " \leq ") denota uma matriz positiva definida (semi-definida positiva, negativa definida e semi-definida negativa) e $\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$ é a matriz bloco diagonal com M_i como i -ésimo bloco.

2. PRELIMINIARES

Restrições Quadráticas Integrais, chamadas no presente trabalho por seu acrônimo em inglês, IQC, são desigualdades empregadas na análise de sistemas dinâmicos para descrever operadores sobre sinais. Constituem-se em uma ferramenta poderosa para se analisar sistemas dinâmicos complexos possuindo elementos não-lineares, variantes no tempo e incertos, entre outros. Introduce-se a seguir a definição precisa de IQC.

Definição 1 Diz-se que dois sinais $u \in \mathbf{L}_2^m[0, \infty)$ e $y \in \mathbf{L}_2^l[0, \infty)$ satisfazem a IQC definida por $\Pi: j\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^{(l+m) \times (l+m)}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0. \quad (1)$$

Via de regra, o denominado *multiplicador* Π em (1) pode ser qualquer função Hermitiana mensurável. Na maioria dos casos, porém, é suficiente se utilizar de funções racionais limitadas no eixo imaginário. Neste trabalho, considera-se que o multiplicador $\Pi(j\omega)$ é racional, hermitiano, e que pode ser decomposto em blocos da forma.

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_1(j\omega) & \Pi_o(j\omega) \\ \Pi_o^H(j\omega) & \Pi_2(j\omega) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Considerando-se um operador limitado no espaço \mathbf{L}_2 , então o multiplicador define uma forma quadrática em \mathbf{L}_2 dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\Pi}(y, u) &\triangleq \left\langle \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}, \Pi \left(\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \right) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \Pi \left(\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Percebe-se, assim, pelo teorema de Parseval, que a IQC (1) descrevendo a distribuição de energia no espectro de frequências pode ser equivalentemente reescrita no domínio do tempo como $\sigma_{\Pi}(y, u) \geq 0$.

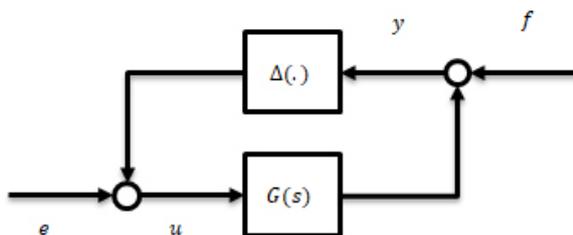


Fig 1: Representação de sistema realimentado

Considere, agora, o sistema em malha fechada representado na Fig. 1, descrito por

$$\begin{cases} y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega) + f(j\omega), \\ u(j\omega) = \Delta(y(j\omega)) + e(j\omega), \end{cases} \quad (4)$$

com G e Δ operadores causais em $\mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ e $\mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$, respectivamente. Os sinais $f \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$ e $e \in \mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ desempenham o papel de ruídos e perturbações da interconexão.

A interconexão da Fig. 1 representa uma abstração na qual se divide um sistema originalmente complexo em dois subsistemas realimentados mais simples. Assume-se que G é um operador linear invariante no tempo, com função de transferência $G(s)$ em $\mathbf{RH}_{\infty}^{l \times m}$, e que o operador Δ possui ganho L_2 limitado. Este último é o elemento do sistema que traduzirá um componente não linear, variante no tempo ou incerto.

O teorema a seguir, introduzido por [6], representa a ferramenta de análise central no presente trabalho.

Teorema 1: Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_{\infty}^{l \times m}$, e seja Δ um operador causal limitado. Se:

1. para cada $\rho \in [0, 1]$, a interconexão de G e $\rho\Delta$ é bem posta;
2. para cada $\rho \in [0, 1]$, a IQC (1) definida por Π é satisfeita por $\rho\Delta$;
1. existe $\epsilon > 0$, tal que, $\forall \omega \in [0, \infty)$

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I, \quad (5)$$

então a interconexão entre G e Δ em (4) é estável.

A inequação (5) é uma desigualdade matricial no domínio da frequência (ou FDI, do inglês *Frequency Domain Inequality*), portanto, de dimensão infinita. Na análise de estabilidade de um dado sistema, uma vez encontradas as IQC que satisfazem o Teorema 1, o passo seguinte é transformar o conjunto infinito resultante de restrições no domínio da frequência de (5) em uma condição computacionalmente tratável, através do lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) [12][13].

Entretanto, a princípio, as condições do Teorema 1 não são triviais de serem verificadas, no sentido de que nem sempre é uma tarefa simples encontrar uma IQC, definida pelo multiplicador Π , que satisfaça os itens. Assim, um tema ativo de pesquisa é a identificação de IQC satisfeitas por operadores de interesse prático. Na Seção 3, serão apresentadas IQC de interesse para a análise de sistemas com atraso.

Em consequência do Teorema 1, se forem satisfeitas as condições 1 e 2, o teste para saber se o sistema possui estabilidade se traduz em verificar a validade da condição (5).

É também importante notar que se $\rho\Delta$ satisfaz as IQC definidas por Π_i , $i = 1, \dots, n$ então a combinação cônica $x_1 \Pi_1 + \dots + x_n \Pi_n$, $x_i \geq 0$ também define uma IQC para $\rho\Delta$. Logo, uma condição suficiente para a estabilidade é a existência das variáveis escalares $x_1, \dots, x_n \geq 0$ tais que (5) valha para

$$\Pi \triangleq x_1 \Pi_1 + \dots + x_n \Pi_n.$$

As IQC oferecem uma forma matemática de tratar sistemas complexos através de modelos de sistemas simplificados. Na prática, um sistema complexo que apresenta vários

elementos incertos concomitantes, pode ser representado por blocos elementares. Assim, com esta modelagem, uma única IQC (representativa do sistema com todas as incertezas) é convertida em um conjunto de IQC que descrevem os subsistemas menores. Obter IQC que representem os subsistemas não é uma tarefa trivial, como já apresentado, e, portanto, esta é uma parcela importante da análise. Encontradas as IQC representativas dos subsistemas, a questão da estabilidade do sistema geral se resume na solução direta da EQ. (5), IQC geral do sistema.

Considere, por exemplo, o caso em que o bloco Δ é constituído por n sub-operadores Δ_i , $i = 1, \dots, n$ de modo que $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$. Seja o vetor de entrada dividido de forma correspondente, $y = [y_1 \dots y_n]$, de modo que y_i representa a entrada do i -ésimo bloco Δ_i . Supõe-se que cada bloco Δ_i satisfaz uma IQC definida por um multiplicador Π_i correspondente, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y_i(t) \\ \Delta_i(y_i(t)) \end{bmatrix}^T \Pi_i \begin{bmatrix} y_i(t) \\ \Delta_i(y_i(t)) \end{bmatrix} dt \geq 0, \quad (6)$$

e que o respectivo multiplicador $\Pi_i(j\omega)$ é particionado da forma

$$\Pi_i(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{i,1}(j\omega) & \Pi_{i,o}(j\omega) \\ \Pi_{i,o}^H(j\omega) & \Pi_{i,2}(j\omega) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Então, nesse caso a incerteza total satisfaz a IQC (1) com o multiplicador

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{1,1}(j\omega), \dots, \Pi_{n,1}(j\omega)) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega)^H, \dots, \Pi_{n,o}(j\omega)^H) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega), \dots, \Pi_{n,o}(j\omega)) \\ \text{diag}(\Pi_{1,2}(j\omega), \dots, \Pi_{n,2}(j\omega)) \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde a diagonal principal é formada por duas matrizes diagonais, uma com os elementos $\Pi_{1,1}, \dots, \Pi_{n,1}$ e a outra com $\Pi_{1,2}, \Pi_{n,2}$ que são os elementos das diagonais principais dos $\Pi_{i,2}$. Da mesma forma, a diagonal secundária do multiplicador, é composta por outras duas matrizes diagonais, com os elementos $\Pi_{1,o}, \dots, \Pi_{n,o}$ e $\Pi_{1,o}^H, \dots, \Pi_{n,o}^H$, elementos das diagonais secundárias dos Π_i .

Na literatura, é possível encontrar IQC para diversos elementos, tais como não linearidades limitadas em setores, incertezas, operadores passivos, etc [11].

Um dos impulsionadores da análise de sistemas por IQC é o fato de o problema poder ser tratado por meios computacionais de forma bastante eficiente, o que é possível através do lema KYP.

No presente trabalho, assume-se que os multiplicadores podem ser fatorados por

$$\Pi(j\omega) = \Psi(j\omega)^H \mathcal{P} \Psi(j\omega), \quad (9)$$

onde \mathcal{P} é uma matriz real simétrica, representada por LMIs, e $\Psi(j\omega)$ uma matriz de transferência. Convenientemente, para essa classe de multiplicadores fatorados por (9), a FDI original (5) pode ser reescrita pela substituição

$$\mathcal{G}(j\omega) = \Psi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}, \quad (10)$$

fazendo com que a inequação adote a forma que é estudada

versão generalizada do Lema de KYP apresentada a no Lema 1.

Lema 1: [11] Seja $\mathcal{P} \in \mathcal{S}^*$ e $\mathcal{G} \in \mathbf{RL}^{* \times *}$ admitindo uma realização $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, com $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{G}} \times n_{\mathcal{G}}}$ e $\lambda(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$. Então, as duas condições a seguir são equivalentes: é válida a FDI

$$\mathcal{G}(j\omega)^H \mathcal{P} \mathcal{G}(j\omega) < 0. \quad (11)$$

existe uma matriz tal que

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

A equivalência persiste para manter:

- desigualdades não estritas se, adicionalmente, o par for controlável,
- igualdades se, adicionalmente, é Hurwitz e o par for controlável.

3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO VIA IQC

3.1 Formulação do problema

Considere o sistema linear com atraso variante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)), \quad (13)$$

com A e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes constantes, e $\tau(t)$ um parâmetro desconhecido variante no tempo que satisfaz

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_0, \quad |\dot{\tau}(t)| \leq d, \quad \forall t \geq 0. \quad (14)$$

Deseja-se analisar a estabilidade do sistema (13) para a classe de atrasos definida por (14).

Os dois operadores definidos a seguir são de particular interesse para o presente trabalho:

$$\mathfrak{D}_{\tau}(y(t)) \triangleq y(t - \tau(t)), \quad (15)$$

$$\mathfrak{S}_{\tau}(y(t)) \triangleq y(t) - y(t - \tau(t)). \quad (16)$$

No lema abaixo são apresentados limites sobre o ganho dos operadores \mathfrak{D}_{τ} e $\mathfrak{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s}$.

Lema 2 [9] Suponha que $d < 1$, e considere o conjunto de funções diferenciáveis $\mathcal{Y} \triangleq \{s(t) | s(t) \in [0, \tau_0], |\dot{s}(t)| \leq d, \forall t\}$. Então:

$$\sup_{\tau(t) \in \mathcal{Y}} \|\mathfrak{D}_{\tau}\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \quad (17)$$

$$\sup_{\tau(t) \in \mathcal{Y}} \left\| \mathfrak{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s} \right\|_{\mathbf{L}_2} = \tau_0. \quad (18)$$

É interessante notar no Lema 2 que o limite sobre o ganho \mathbf{L}_2 de \mathfrak{D}_{τ} depende do limite sobre o módulo da taxa de variação temporal de τ , mas não depende diretamente de τ_0 .

Por outro lado, o limite sobre o ganho L_2 de $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ depende de τ_0 , mas não do limite sobre a taxa de variação temporal.

Na análise de estabilidade do sistema (13), o primeiro passo consiste em se rearranjar o sistema na forma da interconexão de G e Δ apresentado na Fig. 1 e descrito pela equação (4). Inicialmente, seja a equação de estado (13) reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) \\ &= (A + A_d)x(t) - A_d(x(t) - x(t - \tau(t))). \end{aligned} \quad (19)$$

Seja a saída da planta nominal definida como

$$y(t) = x(t). \quad (20)$$

Desse modo, a Eq. (19) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(y(t) - y(t - \tau(t))), \\ y(t) &= x(t). \end{cases} \quad (21)$$

Definindo-se $\Delta \triangleq \mathcal{S}_\tau$, tem-se então que o sistema com atraso (13) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d u(t), \\ y(t) &= x(t), \\ u(t) &= \Delta(y(t)). \end{cases} \quad (22)$$

A descrição acima corresponde exatamente à configuração $G - \Delta$ em (4), com

$$\Delta = \mathcal{S}_\tau \text{ e } G(s) = \begin{bmatrix} A + A_d & -A_d \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

3.2 IQC SATISFEITAS PELO OPERADOR

São apresentadas agora IQC satisfeitas pelo operador \mathcal{S}_τ , conforme discutido em [9]. Essas IQC serão consideradas no Teorema 1 para a análise da estabilidade do sistema com atraso (13).

Inicialmente, note que se $|\dot{t}| \leq d < 1$, então o operador satisfaz a IQC

$$\Pi_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1-d}X_1 & -X_1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

com $X_1 = X_1' \geq 0$. De fato, decorre dos limites do Lema 2 que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \Pi_{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{1-d} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^T X_1 y(t) dt \\ & \quad - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_\tau(y(t))^T X_1 \mathcal{D}_\tau(y(t)) dt \\ &= \frac{1}{1-d} \|X_1^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2 - \|X_1^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_\tau(y(t))\|_2 \\ &= \frac{1}{1-d} \|X_1^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2 - \|\mathcal{D}_\tau(X_1^{\frac{1}{2}} y(t))\|_2 \geq 0. \end{aligned}$$

O resultado acima permite mostrar que, se $|\dot{t}| \leq d < 1$ para todo t , então o operador \mathcal{S}_τ satisfaz a IQC

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

com $X_1 = X_1' \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\tau(y(t)) &= y(t) - y(t - \tau(t)) \\ &= y(t) - \mathcal{D}_\tau(y(t)), \end{aligned} \quad (26)$$

de modo que

$$\mathcal{D}_\tau(y(t)) = y(t) - \mathcal{S}_\tau(y(t)). \quad (27)$$

Como o operador \mathcal{D}_τ satisfaz a IQC $\Pi_{\mathcal{D}}$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \Pi_{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^T \Pi_1 \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \geq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Ou seja, o operador \mathcal{S}_τ de fato satisfaz a IQC definida por Π_1 . O resultado acima está sumarizado na proposição a seguir.

Proposição 1 Suponha que $|\dot{t}| \leq d < 1$. Então, o operador \mathcal{S}_τ satisfaz qualquer IQC definida por Π_1 em (25), com $X_1 = X_1' \geq 0$.

A seguir serão apresentadas mais três IQC satisfeitas pelo operador \mathcal{S}_τ . Provas das proposições podem ser obtidas em [9].

Proposição 2 Suponha que $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0$ e que $|\dot{t}| \leq d < 1$, para todo t . Então, o operador \mathcal{S}_τ satisfaz qualquer IQC definida por

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} |\phi(j\omega)|^2 X_2 & 0 \\ 0 & -X_2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

onde $X_2 = X_2' \geq 0$, e $\phi(s)$ é qualquer função de transferência racional limitada satisfazendo

$$\begin{cases} |\phi(j\omega)| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} & \text{, se } \tau_0|\omega| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \\ |\phi(j\omega)| > \tau_0|\omega| & \text{, se } \tau_0|\omega| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \end{cases} \quad (30)$$

Um exemplo de $\phi(s)$ que satisfaz (30) é

$$\phi(s) = k \frac{\tau_0^2 s^2 + c\tau_0 s}{\tau_0^2 s^2 + a\tau_0 s + kc}, \quad (31)$$

com $k = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}$, $a = \sqrt{2kc}$ para $c \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 3 Suponha que $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0$ e que $|\dot{t}| \leq d < 2$, para todo t . Então, o operador \mathcal{S}_τ satisfaz qualquer IQC definida por

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} |\beta(j\omega)|^2 X_3 & 0 \\ 0 & -X_3 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

com $X_3 = X_3' \geq 0$, e qualquer função de transferência $\beta(s)$ que satisfaça

$$|\beta(j\omega)| \geq g(\omega) + \delta, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

para $\delta \in \mathbb{R}^+$ e

$$g(\omega) \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{2-d}} & , \text{se } |\omega| > \frac{\pi}{\tau_0}, \\ \sqrt{\frac{8}{2-d} \left| \text{sen} \left(\frac{\pi}{\tau_0} \right) \right|} & , \text{se } |\omega| \leq \frac{\pi}{\tau_0}. \end{cases} \quad (34)$$

Um exemplo de função de transferência $\beta(s)$ que satisfaz a equação (33) é

$$\beta(s) = k \frac{\tau_0^2 s^2 + c\tau_0 s}{\tau_0^2 s^2 + a\tau_0 s + b} + \delta, \quad (35)$$

com $k = \sqrt{8/(2-d)}$, $a = \sqrt{6,5 + 2b}$, $b = \sqrt{50}$, $c = \sqrt{12,5}$ e δ é um número positivo arbitrariamente pequeno.

Proposição 4 O operador satisfaz qualquer IQC definida por

$$\Pi_4(j\omega) = \begin{bmatrix} \tau_0^2 \omega^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

com $X_4 = X_4' \geq 0$.

Note que a função G deve ser estritamente própria para se poder usar a IQC Π_4 .

A lista de IQC válidas para o operador S_τ está sumarizada na Tabela 1, de acordo com o limite máximo sobre o módulo da taxa de variação do atraso.

Tab 1: Validade das IQC para o operador

	IQC válidas		
	$d < 1$	$1 \leq d < 2$	$d \geq 2$
Π_1	✓	-	-
Π_2	✓	-	-
Π_3	✓	✓	-
Π_4	✓	✓	✓

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE VIA CONDIÇÃO DE GANHO PEQUENO

Nesta seção, é discutida a análise de estabilidade do sistema com atraso variante no tempo (13) através da abordagem em [10], na qual o atraso é modelado como uma incerteza LTV e a estabilidade é verificada através de uma condição do tipo ganho pequeno.

Considere a seguinte classe de operadores LTV incertos repetidos diagonalmente:

$$\Delta_t \triangleq \{\Delta(y(t)) = [\delta(y_1(t)) \quad \dots \quad \delta(y_l(t))]^T : \delta \in \mathbf{RL}_\infty, \|\delta\|_{L_2} \leq \gamma\}. \quad (37)$$

Considere, também, as seguintes classes de matrizes:

$$\mathbf{D}_r \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{l \times l} : \det D \neq 0\}, \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_{rd} \triangleq \{\widehat{d}I_l : \widehat{d} \in \mathbb{R}, \widehat{d} \neq 0\}, \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_r \triangleq \{P = D^T D : D \in \mathbf{D}_r\}. \quad (40)$$

A condição de ganho pequeno apresentada no lema a seguir pode ser obtida a partir do formalismo IQC do Teorema 1.

Lema 3 Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$, e seja uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente pertencente à classe Δ_t . Então a interconexão da Fig. 1 é estável para toda incerteza admissível se

$$\|DG(s)D^{-1}\|_\infty < \gamma^{-1}, D \in \mathbf{D}_r. \quad (41)$$

Prova. Mostra-se facilmente que $\Delta \in \Delta_t$ satisfaz IQC para o multiplicador.

$$\Pi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P \end{bmatrix}, P \in \mathbf{P}_r \quad (42)$$

De fato,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (43)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ = \left\| D^{\frac{1}{2}} y(t) \right\|_2^2 - \gamma^{-2} \left\| D^{\frac{1}{2}} \Delta(y(t)) \right\|_2^2 \geq 0.$$

A última desigualdade em (43) vem do fato de que $\|\delta\|_{L_2} \leq \gamma$ e da linearidade de δ , de modo que

$$\left\| D^{\frac{1}{2}} \Delta(y(t)) \right\|_2^2 = \left\| \Delta \left(D^{\frac{1}{2}} y(t) \right) \right\|_2^2 \\ = \sum_{i=1}^l \left\| \delta \left(D_i^{\frac{1}{2}} y(t) \right) \right\|_2^2 \leq \gamma^{-2} \sum_{i=1}^l \left\| D_i^{\frac{1}{2}} y(t) \right\|_2^2 \\ = \gamma^{-2} \left\| D^{\frac{1}{2}} y(t) \right\|_2^2. \quad (44)$$

Desta forma, a circunstância suficiente de estabilidade dada pelo teste (5) do Teorema 1 com o multiplicador de (42), torna-se

$$G(j\omega)^H D^H D G(j\omega) - \gamma^{-2} D^H D \leq -\epsilon I, \quad (45)$$

$$\forall \omega \in [0, \infty),$$

e é atendida quando uma incerteza representativa de uma dinâmica LTV satisfaz a condição de estabilidade de (41). □

O teorema a seguir apresenta uma condição de estabilidade a partir do resultado do Lema 3.

Teorema 2 [10] Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ é Hurwitz, e seja

$$\widehat{M}(s) \triangleq -(A_0 + A_1)(sI - (A_0 + A_1))^{-1}A_1 - A_1. \quad (46)$$

Então, a dinâmica com atraso (13) sujeito às condições (14) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:

1. $\|\widehat{M}(s)\|_\infty < \tau_0^{-1}$,
2. $\inf_{D \in \mathcal{D}_{rd}} \|D^{-1}\widehat{M}(s)D\|_\infty < \tau_0^{-1}$,
3. $\inf_{D \in \mathcal{D}_r} \|D^{-1}\widehat{M}(s)D\|_\infty < \tau_0^{-1}$.

Prova. O sistema com atraso (13) pode ser representado na forma $G-\Delta$ em (4) alternativamente com $\Delta \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ e com planta nominal $G(s)$ dada por

$$G(s) \&= \begin{bmatrix} A + A_d & -A_d \\ A + A_d & -A_d \end{bmatrix} \\ \&= -(A_0 + A_1)(sI - (A_0 + A_1))^{-1}A_1 - A_1,$$

correspondendo a $\widehat{M}(s)$ em (46). De acordo com o Lema 2,

$\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \in \Delta_t$ para $\gamma = \tau_0$. Então, a condição do item 3 pode ser obtida a partir da aplicação do Lema 3 considerando-se a planta nominal em (46). As condições nos itens 1 e 2 decorrem do fato de que $\{I\} \subset \mathcal{D}_{rd} \subset \mathcal{D}_r$.

Da prova do Teorema 2, conclui-se que as condições apresentadas naquele teorema estão em ordem decrescente de conservadorismo. Cabe destacar também que a prova do Teorema 2 é baseada no fato de que o ganho L_2 do operador

$\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \in \Delta_t$ é limitado por τ_0 . Ora, esse mesmo fato é utilizado para se mostrar que o operador satisfaz a IQC para Π_4 . Conclui-se, assim, que o resultado contido no Teorema 2 é equivalente à análise IQC para o operador com a IQC para Π_4 apenas. Note que as condições no Teorema 2 independem do valor d , o que explica seu potencial conservadorismo.

O último resultado a ser apresentado no teorema a seguir corresponde à consideração do operador $diag(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$ como constituído por duas dinâmicas LTV incertas repetidas diagonalmente.

Teorema 3 [10] Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ é Hurwitz, e sejam

$$\widehat{M}(s) = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} (sI - (A_0 + A_1))^{-1} [A_1 A_0 \quad A_1^2], \quad (47)$$

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{I}{\sqrt{1-d}} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Então, a dinâmica com atraso (13) sujeito às condições (14) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:

1. $\|\widehat{M}(s)P\|_\infty < \tau_0^{-1}$
2. $\inf_{d>0} \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & d^{-1}I \end{bmatrix} \widehat{M}(s)P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & dI \end{bmatrix} \right\|_\infty < \tau_0^{-1}$,

$$3. \quad \inf_{D \in \mathcal{D}_{rd}} \|D^{-1}\widehat{M}(s)PD\|_\infty < \tau_0^{-1},$$

$$4. \quad \inf_{D_1, D_2 \in \mathcal{D}_r} \left\| \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}^{-1} \widehat{M}(s)P \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \tau_0^{-1}$$

A prova do Teorema 3 acima é análoga àquela do Teorema 2. Ela baseia-se no fato de que o sistema com atraso (13) pode ser representado na forma $G - \Delta$ em (4) com $\Delta \triangleq \text{diag}(\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau)$ e com planta nominal dada por $G(s)$

$$G(s) \&= \begin{bmatrix} A + A_d & -A_d A - A_d^2 \\ I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ \&= \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} (sI - (A_0 + A_1))^{-1} [A_1 A_0 \quad A_1^2],$$

correspondendo a $\widehat{M}(s)$ em (47). Note que, de acordo com o Lema 2,

$$\left\| \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau \right\|_{L_2} \leq \left\| \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \right\|_{L_2} \|\mathcal{D}_\tau\|_{L_2} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-d}} \quad (49)$$

Assim, trata-se do caso de um operador misto com $\Delta_1 \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ e $\Delta_2 \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau$, onde os sub-operadores são tratados como uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente com limite sobre o ganho L_2 de τ_0 , e $\tau_0/\sqrt{1-d}$ respectivamente.

5. APLICAÇÃO NUMÉRICA

São discutidas a seguir duas aplicações numéricas, nas quais são comparadas a análise de estabilidade via IQC da Seção (3) com a análise via ganho pequeno apresentada na Seção (4).

5.1 Exemplo 1

Considere o sistema linear com atraso variante no tempo da forma (13) com

$$A = \begin{bmatrix} -0,4 & -1 \\ -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,4 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix}$$

Para esse sistema, retirado de [10], deseja-se analisar qual o valor máximo de atraso para o qual o sistema permanece estável, para diferentes limites sobre o módulo da taxa de variação do atraso.

Inicialmente, é realizada a análise IQC da Seção 3, na qual a planta é representada na forma da interconexão $G - \Delta$ com o operador Δ dado por \mathcal{S}_τ , obtendo $G(s) = \begin{bmatrix} A + A_d & -A_d \\ I & 0 \end{bmatrix}$ e $\Delta = \mathcal{S}_\tau$. Nesta análise, a condição de estabilidade é verificada pela aferição ponto a ponto da factibilidade das LMIs, que na verdade traduzem a FDI associada à análise IQC.

O resultado da análise de estabilidade via IQC para esse problema está sintetizado nas Fig. 2 e 3, nas quais consta a curva do valor máximo de atraso τ_0 que a planta suporta antes da instabilidade em função da taxa de variação máxima d para o atraso.

O primeiro passo para o cálculo do valor máximo de atraso que o sistema comporta para cada valor da taxa de va-

riação elencada consiste em construir, para um determinado limite sobre a taxa de variação do atraso, as funções auxiliares $\phi(s)$ e $\beta(s)$ de acordo com (31) e (35), respectivamente.

Em seguida, é verificado se a LMI de estabilidade dada por (12) é exequível para um hipotético atraso na taxa desejada. Esta fase da análise baseia-se em um algoritmo que implementa o método da bissecção. Neste método, é suposto um intervalo qualquer onde o valor hipotético do atraso máximo se encontra. Aqui a taxa é considerada como fixa. O aperfeiçoamento dos limites desse intervalo é incrementado a cada passo, na medida que o intervalo vai se reduzindo até estar dentro de uma margem aceitável. Para cada teste é resolvida a LMI correspondente tomando o valor da taxa constante e obtendo, assim, o valor do atraso como resposta. Em seguida, é feita a devida alteração no limite superior ou inferior do intervalo de teste, dependendo se foi encontrada ou não uma solução possível para a LMI. O processo se encerra quando o intervalo converge para um valor dentro da precisão exigida. Alcançado o valor, o processo é retomado para o próximo valor de interesse de taxa de variação.

No trabalho, o algoritmo foi implementado no MATLAB e os cálculos das LMIs foram efetuados pelas ferramentas YALMIP e SEDUMI, que são uma plataforma para construção de problemas de desigualdade de matrizes e um solucionador de desigualdades, respectivamente.

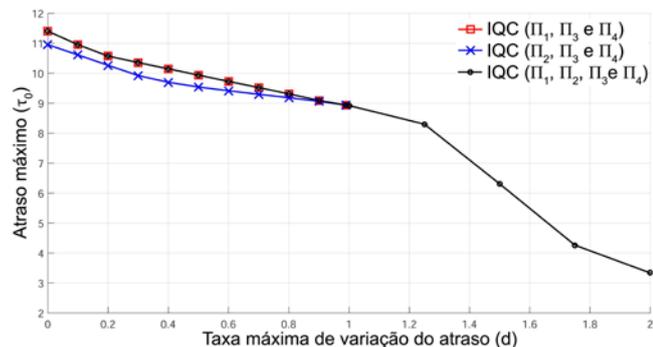


Fig. 2: Análise IQC para a planta (50)

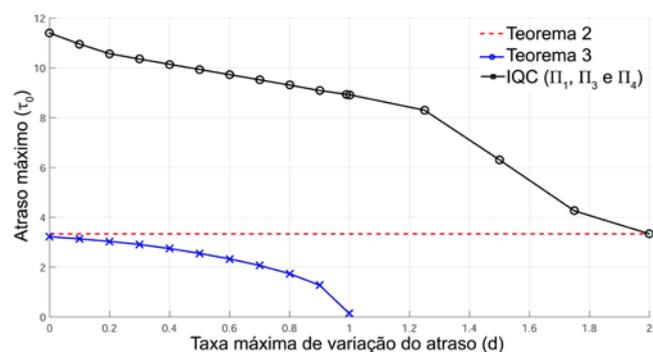


Fig. 3: Atraso máximo admitido pela planta (50) obtidos por diferentes técnicas.

Da análise da FIG. 2, evidencia-se uma constatação feita em [9]: a de que o ganho em se considerar o multiplicador é praticamente nulo, de modo que esse multiplicador pode ser desprezado na análise.

Na Fig. 3 é comparado o resultado da análise via IQC e via Teoremas 2 e 3. Conforme esperado, é possível se con-

firmar que o resultado obtido via Teorema 2 é equivalente ao obtido via análise IQC para o operador \mathcal{S}_τ com Π_4 apenas. Ainda na FIG. 3, fica evidente o conservadorismo do Teorema 3, em decorrência de se considerar o atraso como uma incerteza LTV limitada em norma.

5.2 Exemplo 2

Considere, agora, o seguinte sistema apresentado em [14]:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0,2 & -5,8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)). \quad (51)$$

O resultado da análise do maior atraso tolerado pelo sistema, analogamente ao realizado no exemplo anterior, é mostrado na Fig. 4. Também na presente aplicação, observa-se que a contribuição de Π_2 é desprezível, de modo que é mostrado o resultado da análise com os multiplicadores Π_1 , Π_3 e Π_4 apenas.

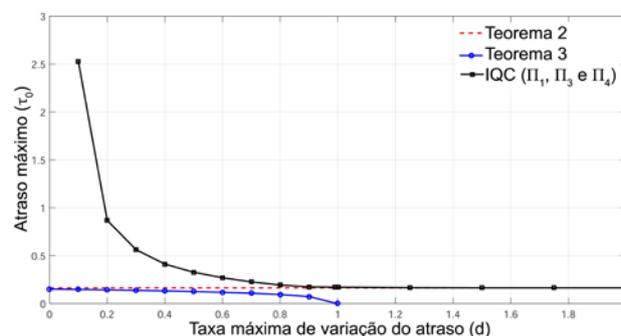


Fig. 4: Atraso máximo admitido por (51)

Sabe-se que esse sistema é estável para qualquer valor de atraso constante. Esse fato é confirmado na análise IQC mostrada na Fig. 4, onde se observa que a tendência da curva é seguir assintoticamente o eixo vertical para tendendo a zero. O fato de não haver um valor máximo de atraso corrobora que o sistema é sempre estável para um atraso constante. No entanto, o sistema não é estável independentemente do atraso. A análise IQC revela o comportamento da estabilidade à medida que uma maior taxa de variação é admitida para o atraso.

Os resultados dos Teoremas 2 e 3 também são apresentados na Fig. 4. Novamente, o resultado obtido via Teorema 2 é equivalente ao obtido via análise IQC para Π_4 apenas, e a análise via Teorema 3 se revela mais uma vez bastante conservadora.

6. CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi discutida a análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo a partir da teoria IQC. Comparou-se a análise via IQC com uma análise via condição de ganho pequeno, associada ao tratamento do atraso como uma incerteza. As aplicações numéricas apresentadas evidenciaram o conservadorismo da abordagem do tipo ganho pequeno, quando comparada com a análise via IQC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Wang, Shuenn-Shyang; Chen, Bor-Sen; Lin, Teng-Pin; Robust stability of uncertain time-delay systems; *International Journal of Control*, 1987, v. 46, n. 3, p. 963-976.
- [2] KHARITONOV, Vladimir L.; Robust stability analysis of time delay systems: A survey; *IFAC Proceedings Volumes*, 1998, v. 31, n. 18, p. 1-12.
- [3] GU, Keqin; CHEN, Jie; Kharitonov, Vladimir L.; *Stability of time-delay systems*; Springer Science & Business Media, 2003.
- [4] Debeljković, Dragutin Lj.; Nestorović, Tamara; Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems. In: *Time-Delay Systems*; InTech, 2011.
- [5] Chiasson, John; Loiseau, Jean Jacques (Ed.); *Applications of time delay systems*; Springer, 2007.
- [6] Megretski, Alexandre; Rantzer, Anders; System analysis via integral quadratic constraints.; *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, v. 42, n. 6, p. 819-830.
- [7] Zhou, Kemin; Doyle, John Comstock; Glover, Keith; *Robust and optimal control*. Vol. 40.; New Jersey: Prentice hall, 1996.
- [8] Vidyasagar, M.; *Nonlinear Systems Analysis (2Nd Ed.)*; Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992
- [9] Kao, Chung-Yao; Rantzer, Anders; Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays; *Automatica*, 2007, v. 43, n. 6, p. 959-970.
- [10] Zhu, Jing; Qi, Tian; Chen, Jie; Small-gain stability conditions for linear systems with time-varying delays; *Systems & Control Letters*, 2015, v. 81, p. 42-48.
- [11] Veenman, Joost; Scherer, Carsten W.; Köroğlu, Hakan; Robust stability and performance analysis based on integral quadratic constraints; *European Journal of Control*, 2016, v. 31, p. 1-32.
- [12] Rantzer, Anders; On the Kalman—Yakubovich—Popov lemma; *Systems & Control Letters*, 1996, v. 28, n. 1, p. 7-10.
- [13] Iwasaki, Tetsuya; Hara, Shinji; Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications; *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, v. 50, n. 1, p. 41-59.
- [14] Gu, Keqin; Niculescu, S. I.; Additional dynamics in transformed time-delay systems; *IEEE Transactions on automatic control*, 2000, v. 45, n. 3, p. 572-575.