

# Identificação de sistemas lineares com base na resposta temporal ao degrau unitário e por ajuste ótimo da resposta em frequência

Marcelo A Oliveira\*, Roberto Ades, Paulo C Pellanda  
Instituto Militar de Engenharia  
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha,  
Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP 29.270-030  
\*oliveira.marcelo@ime.br

**RESUMO:** Este trabalho apresenta um método para identificação da função de transferência de um sistema dinâmico, com base na sua resposta a uma entrada em degrau unitário e no ajuste ótimo aos dados da resposta em frequência medida. Os coeficientes dos polinômios da função de transferência são calculados analiticamente e de maneira a minimizar uma função custo de norma quadrática. Com o uso deste novo método, é possível obter melhores ajustes dos modelos identificados tanto na resposta frequencial como na resposta no tempo em regime permanente. Três sistemas são utilizados como exemplos para mostrar essas vantagens: os dois primeiros são exemplos acadêmicos lineares; o terceiro consiste em um sistema real, um motor elétrico de corrente contínua, onde estão presentes efeitos de não-linearidade e ruídos decorrentes do processo de aquisição de dados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas de Controle. Identificação de Sistemas. Resposta em Frequência.

**ABSTRACT:** This paper presents a method to identify the transfer function of a dynamic system based on its unit step response and on the optimal tuning of its measured frequency response. Transfer function polynomial coefficients are analytically computed in order to minimize a cost function based on a square norm. Better tunings can be obtained by using this method in terms of frequency response as well as in steady state time response. Three examples systems are used to demonstrate this advantages: the first two are linear academic examples; the third one is an actual DC electric motor including nonlinearity effects and noises arising from the data acquisition process.

**KEYWORDS:** Control Systems. Systems Identification. Frequency Response.

## 1. INTRODUÇÃO

As técnicas de identificação de sistemas dinâmicos são ferramentas numéricas alternativas à modelagem convencional que, em alguns casos, torna-se de difícil aplicação devido à complexidade do equacionamento matemático dos fenômenos físicos intrínsecos à planta sob estudo. Um bom modelo é aquele que consegue representar a dinâmica do sistema satisfatoriamente sem, no entanto, envolver uma complexidade matemática excessiva. Geralmente, o modelo do sistema é o ponto de partida para as aplicações de sínteses de controle, que permitirão, em malha fechada, modificar o comportamento do sistema no sentido de atender aos requisitos de robustez em estabilidade e de desempenho.

Uma visão geral das técnicas de identificação de sistemas lineares é apresentada de forma sintética em [1]. O trabalho abrange a abordagem clássica dos métodos paramétricos por meio da máxima verossimilhança e métodos de erro de predição, bem como métodos clássicos não paramétricos através de análise espectral. Outros trabalhos, como [2], [3] e [4], possibilitam maior aprofundamento no assunto.

Basicamente, é possível realizar a identificação de modelos de duas formas, no domínio do tempo ou da frequência. Ambas apresentam resultados bastante eficientes, porém [5] este último grupo mostra algumas vantagens, como a maior facilidade no tratamento do ruído, a redução do volume de dados, a desconsideração do estado inicial e a maior facilidade na validação do modelo. As duas abordagens foram consideradas como métodos concorrentes por um longo período de tempo [4]. No entanto, em muitos casos, os dados utilizados no domínio da frequência são obtidos a partir da aplicação da transformada de Fourier em dados medidos no domínio do tempo, denotando a existência de uma relação entre tempo e frequência. A diferença básica é que algumas informações são mais facilmente

acessíveis em um domínio do que no outro e isto se reflete nos próprios métodos, ou seja, diferem na forma como a informação disponível é tratada. Cabe ainda considerar que as duas abordagens podem ser utilizadas de forma complementar, como discutido em [6].

Em diversas técnicas de identificação, observa-se a preocupação em obter soluções analíticas, o que só é possível, normalmente, em alguns problemas convexos em relação às variáveis de ajuste. Um exemplo de método de identificação no domínio da frequência e com solução analítica é apresentado em [7], tendo sido denominado de N2CACGO. O método possui algumas vantagens em relação às outras técnicas, como ressaltado pelos próprios autores. No caso de sistemas multivariáveis, a matriz função de transferência identificada é obtida pela solução de um problema de otimização convexo, de forma analítica e ótima, com base em um critério de norma quadrática definido no domínio da frequência. O método adota como critério de ajuste a norma quadrática do erro entre a resposta em frequência do sistema original, que pode ter sido levantada experimentalmente, e a do modelo identificado. Entretanto, ao se utilizar o método, é possível perceber que, em alguns casos, o modelo identificado é instável ou de fase não-mínima, o que pode ser inconveniente em algumas aplicações de síntese ou análise. Isto é consequência da falta de mecanismos do método para alocar os polos e zeros da Função de Transferência (FT), identificada necessariamente no semiplano  $s$  esquerdo, mesmo quando os dados utilizados de resposta em frequência sejam oriundos de um sistema estável e de fase mínima. Outro aspecto não satisfatório observado é que, em alguns casos, as respostas temporais dos modelos identificados apresentam erro de estado estacionário em relação à resposta do sistema original.

Na abordagem proposta neste trabalho, é discutida uma melhoria no método que visa eliminar o erro de regime permanente da resposta temporal, bem como reduzir a

quantidade de modelos identificados instáveis ou de fase mínima, sem alterar a essência da técnica. Para isto, inclusive, na formulação desse método de identificação no domínio da frequência, restrição contendo informação sobre a resposta temporal ao degrau unitário, em regime permanente, do sistema sob estudo.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Formulação do problema

O problema abordado consiste em determinar a FT de um sistema do tipo caixa-preta [2], onde suas entradas e saídas são sinais contínuos no tempo, a partir de sua resposta em frequência medida experimentalmente em um conjunto de valores de frequências numa faixa de interesse. Admite-se que a FT a ser identificada seja do tipo racional com ordem  $n$  e possa ser representada no seguinte formato:

$$G_e^n(s) = \frac{N(\underline{\alpha}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (1)$$

em que  $\underline{\alpha}$  e  $\underline{\beta}$  são, respectivamente, os vetores de coeficientes reais do numerador e do denominador;  $N(\underline{\alpha}, s)$  e  $D(\underline{\beta}, s)$  representam, respectivamente, os polinômios em  $s$  do numerador e denominador de  $G_e^n(s)$ .

### 2.2 O Método N2CACGO

Este método [7] procura estimar uma família de modelos racionais e próprios, na forma definida em (1), com ordem  $n$  previamente escolhida, a partir de uma formulação convexa do problema de identificação. Para isso, o modelo escolhido é o que melhor se ajusta aos dados medidos de resposta em frequência  $G(j\omega) \in \mathbb{C}^m$ , com base na minimização da função erro  $J(\underline{\theta})$ , baseada em norma quadrática:

$$J(\underline{\theta}) \triangleq \|D(\underline{\beta}, j\omega) \cdot * G(j\omega) - N(\underline{\alpha}, j\omega)\|_2 \quad (2)$$

sendo  $\underline{\theta} = [\underline{\alpha}^T \ \underline{\beta}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$  o vetor de variáveis de projeto;  $\underline{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_m]^T$  um vetor de  $m$  valores de frequências escolhidas na faixa de interesse;  $N(\underline{\alpha}, j\omega)$  e  $D(\underline{\beta}, j\omega)$  os vetores das respostas em frequência, respectivamente, do numerador e do denominador de  $G_e^n(\underline{\theta}, s)$ ; o operador  $\cdot *$  representa o produto entre as coordenadas correspondentes de dois vetores; e, finalmente, para  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_m] \in \mathbb{C}^m$ :

$$\|Q\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |q_i|^2}$$

Arbitrada a ordem  $n$ , estabelece-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} J(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} \|D(\underline{\beta}, j\omega) \cdot * G(j\omega) - N(\underline{\alpha}, j\omega)\|_2 \quad (3)$$

O método determina analiticamente os coeficientes da função estimada, de maneira ótima, minimizando o custo  $J(\underline{\theta})$ , por meio da solução de um sistema de equações lineares.

## 2.3 Modelos Estritamente Próprios

Em [8], foi apresentada uma modificação da técnica introduzida em [7], de forma que a expansão de  $G_e^n(s)$  passou a contemplar também funções racionais estritamente próprias, resultando em modelos com custos relativamente menores em alguns casos. Aumenta-se sequencialmente a ordem do modelo estimado, de maneira que o erro entre os dados de resposta em frequência medidos do sistema e os calculados do modelo seja gradativamente reduzido, segundo o critério definido em (2). Nesta abordagem, varia-se também o grau relativo da função estimada para cada ordem do modelo, o que equivale a atribuir valores nulos para alguns dos coeficientes do polinômio do numerador, acarretando que a função estimada seja obrigatoriamente do tipo estritamente própria.

## 3. MÉTODO PROPOSTO

O método proposto neste artigo agrega uma melhoria na metodologia comentada na Seção 2, incluindo na formulação do problema a informação referente ao valor em regime permanente da resposta temporal do sistema, face a uma entrada do tipo degrau unitário. Desta forma, a metodologia pode ser dividida em três partes. A primeira delas consiste na obtenção dos dados de resposta em frequência do sistema [9] em um conjunto de frequências na faixa de interesse, além do valor em regime permanente da resposta ao degrau. Na segunda parte, vários modelos são gerados, variando-se a ordem e o grau relativo das soluções. Já na terceira parte, é escolhido o modelo identificado, com base no critério de erro, sendo feita a verificação da possibilidade de redução da ordem via realização balanceada [10] e a validação do modelo estimado. A ênfase deste artigo é na segunda parte do método.

Para compreensão da abordagem proposta, considere o resultado enunciado pelo Teorema do Valor Final [11], que estabelece que a resposta  $y(t)$  em regime permanente, caso exista, pode ser determinada por:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (4)$$

Para efeito de simulação, o valor em regime permanente  $K$  da saída do sistema face à aplicação de uma entrada do tipo degrau unitário, pode ser calculada aplicando-se a propriedade em (4) na função de transferência  $G(s)$  do sistema, de acordo com:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (5)$$

Nos casos de identificação de modelos a partir de sistemas físicos reais, o valor de  $K$  em (5) pode ser obtido a partir da medição do valor da saída do sistema, em regime permanente, a partir da excitação da entrada com um sinal do tipo degrau unitário. Logicamente, se faz necessário que o sistema sob estudo possa ser excitado pela entrada mencionada. Quando a técnica proposta é aplicada na redução de ordem de modelos, o valor de  $K$  pode ser calculado por:

$$K = \frac{a_n}{b_n}$$

em que  $a_n$  e  $b_n$  são, respectivamente, os coeficientes independentes de  $s$  nos polinômios do numerador e do denominador do modelo original. A condição para que o modelo identificado responda da mesma forma será:

$$\alpha_n = K\beta_n \quad (6)$$

com o parâmetro  $\alpha_n$  passando a ser determinado pelo valor calculado de  $\beta_n$ , ou seja, o modelo passa a contar com um parâmetro a menos.

### 3.1 Cálculo dos modelos bipróprios

A representação adotada para as funções estimadas será da forma:

$$G_e^n(\underline{\theta}, s) = \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + K\beta_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (7)$$

em que:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\beta} &= [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]^T \in \mathbb{R}^n \\ \underline{\theta} &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{2n}]^T = [\underline{\alpha}^T \ \underline{\beta}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n} \end{aligned} \quad (8)$$

e o critério de erro  $J(\underline{\theta})$  é o mesmo apresentado em (2).

O Lema 1 mostra que a função  $J(\underline{\theta})$  utilizando os parâmetros estimados em (8) é convexa.

**Lema 1:** Seja  $G_e^n(s)$  uma função de transferência a ser estimada, na forma de (7), e  $S$  um conjunto convexo, tal que  $\underline{\theta} \in S \subset \mathbb{R}^{2n}$  é o vetor de variáveis de projeto, então  $J(\underline{\theta}): \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  em (2) é uma função convexa.

**Demonstração:** Dado que o domínio de  $J(\cdot)$  é um conjunto convexo, basta mostrar que  $\forall \underline{\theta}_A, \underline{\theta}_B \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $\forall \lambda \in [0,1]$ :

$$J(\lambda \underline{\theta}_A + (1-\lambda)\underline{\theta}_B) \leq \lambda J(\underline{\theta}_A) + (1-\lambda)J(\underline{\theta}_B)$$

Omitindo o argumento  $j\omega$  em  $G$  e mantendo a variável  $s$  no lugar de  $j\omega$ , para simplificar a notação, verifica-se que:

$$J(\lambda \underline{\theta}_A + (1-\lambda)\underline{\theta}_B) =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| D(\lambda \underline{\beta}_A + (1-\lambda)\underline{\beta}_B) \cdot *G - N(\lambda \underline{\alpha}_A + (1-\lambda)\underline{\alpha}_B) \right\|_2 \\ &= \left\| (s^n + (\lambda\beta_{A1} + (1-\lambda)\beta_{B1})s^{n-1} + \dots)G + \right. \\ &\quad \left. - [(\lambda\alpha_{A0} + (1-\lambda)\alpha_{B0})s^n + \dots + K(\lambda\beta_{An} + (1-\lambda)\beta_{Bn})] \right\|_2 \\ &= \left\| \lambda[(s^n + \beta_{A1}s^{n-1} + \dots + \beta_{An})G \right. \\ &\quad \left. - (\alpha_{A0}s^n + \alpha_{A1}s^{n-1} + \dots + K\beta_{An})] + \right. \\ &\quad \left. + (1-\lambda)[(s^n + \beta_{B1}s^{n-1} + \dots + \beta_{Bn})G \right. \\ &\quad \left. - (\alpha_{B0}s^n + \alpha_{B1}s^{n-1} + \dots + K\beta_{Bn})] \right\|_2 \\ &\leq \lambda \left\| D(\underline{\beta}_A) \cdot *G - N(\underline{\alpha}_A) \right\|_2 + (1-\lambda) \left\| D(\underline{\beta}_B) \cdot *G - N(\underline{\alpha}_B) \right\|_2 \end{aligned}$$

$$= \lambda J(\underline{\theta}_A) + (1-\lambda)J(\underline{\theta}_B).$$

Vale observar que a desigualdade na operação algébrica acima, decorre da propriedade de normas conhecida por desigualdade triangular.  $\square$

Considerando (7), o problema de identificação passa a ser:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}} J(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}} \left\| D(\underline{\beta}, j\omega) \cdot *G(j\omega) - N(\underline{\alpha}, \beta_n, j\omega) \right\|_2 \quad (9)$$

Pelo Lema 1,  $J(\underline{\theta})$  é uma função convexa. Logo, o problema estabelecido em (9) possui uma única solução que, caso possa ser determinada, será o mínimo global do mesmo. O Teorema 1 propõe uma forma de cálculo da solução do problema em (9).

**Teorema 1:** A solução ótima do problema (9) pode ser determinada resolvendo-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\underline{Q}\underline{\theta} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = Y \quad (10)$$

em que  $Q_p = \sum_{i=1}^m \text{Re}(M_p(j\omega_i))$  com  $p \in \{1, 2, 3, 4\}$  e  $\text{Re}(\cdot)$  representa a parte real do argumento:

$$M_1 = \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix} \left( K \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & R_0^* \end{bmatrix} - G^* \begin{bmatrix} R_{n-1}^* & R_{n-2}^* & \dots & R_0^* \end{bmatrix} \right)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* \end{bmatrix}$$

$$M_4 = G^* \overline{M}_4 - K \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & R_0^*(G-K) \end{bmatrix}$$

Sendo

$$\overline{M}_4 = \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1}^* & R_{n-2}^* & \dots & R_0^* \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \sum_{i=1}^m \text{Re} \left( R_n^* G^* \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix} \right)$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^m \text{Re} \left( R_n^* G^* \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_1 \\ R_0 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_0 \end{bmatrix} \right)$$

e, finalmente,  $R_k = R_k(j\omega_i) \triangleq (j\omega_i)^k$  e  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Demonstração:** Considere a função custo apresentada em (2), que pode ser reescrita como:

$$J(\underline{\theta}) = \left\| D(\underline{\beta}, j\omega) * G(j\omega) - N(\underline{\alpha}, j\omega) \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| D(\underline{\beta}, j\omega_i) G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, j\omega_i) \right|^2}$$

ou ainda,

$$J^2(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^m \Psi(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i) \quad (11)$$

em que  $\Psi(j\omega_i) = D(\underline{\beta}, j\omega_i) G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, j\omega_i)$ .

Como se trata de um problema convexo, uma condição necessária e suficiente para determinar a solução é:

$$\nabla J^2(\underline{\theta}) = \left( \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_{n-1}}, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_1}, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \beta_n} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, derivando parcialmente (11) pelas componentes de  $\underline{\theta}$ , chega-se a:

$$\frac{\partial J^2}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_k} \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) \frac{\partial \Psi^*(j\omega_i)}{\partial \theta_k} \right)$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^m 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_k} \Psi^*(j\omega_i) \right)$$

Omitindo o argumento em  $j\omega_i$  para simplificar a notação e, observando que  $\theta_k = \alpha_{k-1}$  para  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , conforme (8), segue após algumas manipulações algébricas da condição:

$$\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_k} = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

que

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left( R_{n-k} \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* & -R_{n-1}^* G^* & \dots \\ -R_1^* G^* & -R_0^* (G^* - K) \end{bmatrix} \underline{\theta} = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left( R_{n-k} R_n^* G^* \right) \quad (12)$$

De maneira análoga, tratando as variáveis  $\beta_k$ , com  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , chega-se a:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left( R_{n-k} G \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* & -R_{n-1}^* G^* & \dots \\ -R_1^* G^* & -R_0^* (G^* - K) \end{bmatrix} \underline{\theta} = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left( R_{n-k} G G^* R_n^* \right) \quad (13)$$

e, finalmente, para  $\beta_n$  tem-se que:

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left( R_0 (G - K) \begin{bmatrix} R_n^* & R_{n-1}^* & \dots & R_1^* & -R_{n-1}^* G^* & \dots \\ -R_1^* G^* & -R_0^* (G^* - K) \end{bmatrix} \underline{\theta} = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \left( R_0 (G - K) G^* R_n^* \right) \quad (14)$$

Agupando sob a forma de um sistema de equações lineares as  $n$  equações geradas em (12), as  $n-1$  equações geradas em (13) e a equação em (14), obtém-se (10).  $\square$

### 3.2 Cálculo dos modelos estritamente próprios

Neste caso, os modelos estimados serão estritamente próprios e terão a seguinte forma:

$$G_e^n(\underline{\theta}_k, s) = \frac{\alpha_k s^{n-k} + \alpha_{k+1} s^{n-k-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + K \beta_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n} \quad (15)$$

O equacionamento poderá ser obtido a partir do Teorema 1. As matrizes  $Q$  e  $Y$  em (10) devem ser convenientemente alteradas, suprimindo linhas e colunas conforme o grau relativo  $k$  arbitrado, ou seja:

$$Q_k = Q(k+1:2n, k+1:2n)$$

$$Y_k = Y(k+1:2n)$$

onde  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $Q_k$  corresponde a matriz  $Q$ , com a eliminação das primeiras  $k$  linhas e  $k$  colunas, e  $Y_k$  corresponde ao vetor  $Y$ , com a eliminação das primeiras  $k$  linhas.

Assim, o sistema de equações lineares a ser resolvido é:

$$Q_k \underline{\theta}_k = Y_k$$

com  $\underline{\theta}_k = [\alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{n-1} \beta_1 \dots \beta_n]^T \in \mathbb{R}^{2n-k}$ ,

para  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  e  $\underline{\theta}_k = [\beta_1 \dots \beta_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , para  $k = n$ .

## 4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Os três exemplos apresentados nesta seção evidenciam algumas vantagens referentes à modificação proposta. Para isto são feitas análises comparativas entre os modelos identificados obtidos pela aplicação do método N2CACGO na sua forma original e pelo Método Proposto (MP).

Para fins de avaliação dos modelos identificados, foram utilizados dois índices. O primeiro levou em consideração o erro de ajuste da resposta em frequência entre o modelo original  $G(s)$  e o identificado  $G_e^n(s)$ , de forma direta:

$$I_F = \left\| G(j\omega) - G_e^n(j\omega) \right\|_2 \quad (16)$$

considerando um conjunto com  $m$  valores de frequências  $\underline{\omega} = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m]^T$ , previamente escolhidas em uma faixa de interesse.

O segundo índice se refere ao erro entre a resposta ao degrau  $y(t)$  do sistema sob estudo em relação à do modelo identificado  $y_m(t)$ . É definido pela integral do erro quadrático, de acordo com:

$$I_{ISE} = \int_0^\infty [y(t) - y_m(t)]^2 dt \quad (17)$$

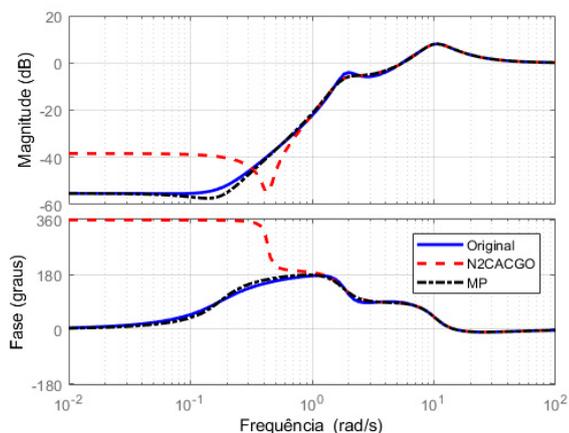
Embora tenham sido considerados os índices (16) e (17), é importante ressaltar que os modelos foram ajustados segundo o critério em (2) e, conseqüentemente, em relação a este é que o ajuste é ótimo. O emprego do índice em (16) na metodologia proposta tornaria o problema não convexo nas variáveis de projeto.

### 4.1 Exemplo acadêmico A

Neste exemplo, é feita uma análise comparativa entre dois modelos identificados de sexta ordem. Os dados de resposta em frequência foram calculados a partir de uma FT de décima ordem, estável e de fase mínima, que foi gerada de forma aleatória por uma rotina computacional. Os coeficientes encontram-se na Tabela A.1 do Apêndice.

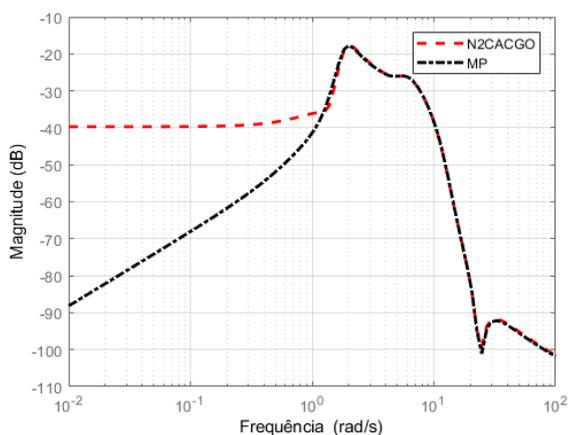
Na Fig. 1, são apresentados os diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados pelos dois métodos. Pode ser observado que a resposta em

frequência do modelo obtido pela aplicação do método N2CACGO não possui um bom ajuste na faixa de baixas frequências, quando comparado com o resultado obtido pelo método proposto.



**Fig. 1** – Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

A resposta em frequência da FT original se assemelha à de um filtro passa alta, com diferenças relativas entre os valores em módulo nas faixas de baixas e altas frequências. Como o método N2CACGO se baseia na otimização do custo de ajuste entre a resposta em frequência do sistema original e a do modelo identificado sem normalizar esses valores, o método priorizou o ajuste na faixa de altas frequências, que possui valores mais altos, em detrimento do ajuste em baixas frequências, como pode ser observado também na Fig. 2, que apresenta os erros em resposta em frequência dos dois modelos identificados em relação à resposta em frequência do modelo original.

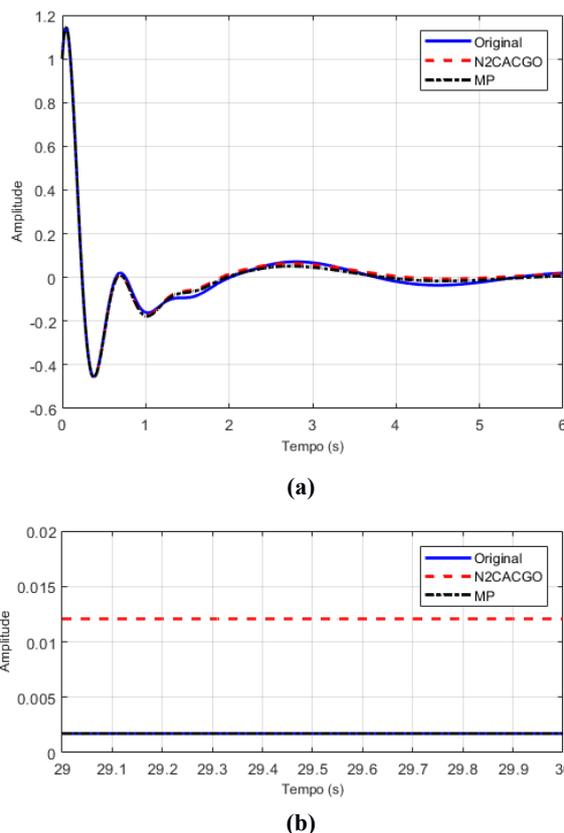


**Fig. 2** – Erros nas respostas em frequência entre os modelos identificados e o original.

Como a modificação proposta garante que os valores dos coeficientes independentes de  $s$  do modelo identificado e do original sejam definidos por uma mesma razão numérica, o ajuste obtido em baixa frequência é mais preciso e, conseqüentemente, o problema existente na aplicação do

método N2CACGO na sua forma original não ocorre nesta ordem de modelo identificado pela abordagem proposta.

Na Fig. 3 são apresentados detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos dois métodos. Percebe-se que o modelo obtido pelo método N2CACGO na sua forma original possui erro estacionário na resposta ao degrau unitário em relação à resposta do modelo original, em regime permanente. As respostas do modelo original e identificado por meio da abordagem proposta convergem para o mesmo valor. Isto decorre do fato das razões entre os coeficientes independentes de  $s$  nos modelos original e identificado pelo MP serem iguais.



**Fig. 3** – Detalhes das respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP): (a) 0 a 6s; (b) 29s a 30s .

Na Tab. 1 são apresentados os erros de ajuste dos modelos identificados, considerando os indicadores definidos por (10) e (11). Utilizou-se um intervalo de tempo de 30 s para o cálculo do índice  $I_{ISE}$  e 100 valores de frequência igualmente espaçados de maneira logarítmica na faixa definida entre 10<sup>-2</sup> a 10<sup>2</sup> rad/s para o cálculo do índice  $I_F$ . Como os erros do modelo identificado pelo método proposto está menor, é possível concluir que o mesmo está mais bem ajustado segundo os critérios estabelecidos.

**Tabela 1: Erros de ajuste dos modelos identificados.**

Método	$I_{ISE}$	$I_F$
N2CACGO	0,0043	0,3336
MP	0,0012	0,3245

Outro aspecto a ser observado neste exemplo é que o modelo obtido pelo método proposto é estável e de fase mínima e o obtido pelo método original é estável e de fase não-mínima (possui dois zeros no semiplano  $s$  direito), fato que nem sempre ocorre. De um modo geral, para obtenção de ajustes melhores na aplicação de métodos de identificação, aumenta-se a ordem do modelo estimado. Como consequência imediata, o modelo estimado apresenta maior complexidade matemática. Contudo, ao se utilizar o método N2CACGO deve-se observar ainda que há a possibilidade de o modelo obtido ser instável ou de fase não-mínima, em função de ser requerido do método uma ordem acima da necessária para reproduzir o comportamento dinâmico. Neste caso, os polos instáveis acabam sendo introduzidos no modelo estimado pelo sistema de equações lineares formado.

Em algumas situações, se o método ajusta bem o modelo com uma ordem  $n$  qualquer, a especificação pelo operador de uma ordem maior que  $n$  no procedimento de identificação pode gerar um modelo identificado com polos e zeros canceláveis, ou seja, com polos e zeros alocados próximos um do outro, inclusive localizados no semiplano  $s$  direito do plano complexo. Outro aspecto que deve ser considerado, é que os resultados de identificação podem ser melhorados por meio de ajustes finos nos parâmetros de entrada do método de identificação, como por exemplo: variação na faixa de frequência considerada, aumento da quantidade de valores de frequência na faixa de interesse, variação da ordem estimada e do grau relativo, além da redução da ordem do modelo identificado.

#### 4.2 Exemplo acadêmico B

Além de evidenciar algumas vantagens relativas do método modificado por meio de uma análise comparativa entre os modelos identificados, neste exemplo é ressaltada a importância da seleção adequada da faixa de frequência no processo de identificação. Os dados de resposta em frequência foram calculados a partir de uma FT estável e de fase mínima com ordem 12, gerada de maneira aleatória por uma rotina computacional e os modelos identificados são de décima ordem. Os coeficientes encontram-se na Tabela A.2 do Apêndice.

Inicialmente, foi adotada uma faixa de frequência ampla no processo de identificação, baseada no comportamento da resposta em frequência do modelo original e definida entre  $10^{-3}$  a  $10^5$  rad/s. Como resultado, todos os modelos bipróprios identificados de ordens  $n = 2$  até 12 foram instáveis e de fase não mínima. Em seguida, adotou-se a faixa de frequência entre  $10^{-2}$  a  $10^3$  rad/s. O ajuste das curvas identificadas melhorou mas os modelos identificados ainda foram instáveis e de fase não-mínima. Na Fig. 4 são apresentados os diagramas de resposta em frequência do modelo original e dos identificados de ordem  $n = 10$  utilizando os dois métodos na faixa de frequência de  $10^{-2}$  a  $10^3$  rad/s.

Os resultados melhoraram significativamente quanto foi selecionada uma faixa de frequência mais estreita, definida de  $10^{0,2}$  a  $10^{1,2}$  rad/s, com o objetivo de priorizar o intervalo em que o comportamento dinâmico é mais relevante. Dos

doze modelos bipróprios identificados, com ordens  $n = 2$  até 12, dez foram estáveis e o erro de ajuste em resposta em frequência diminuiu consideravelmente. Semelhante ao apresentado na Fig. 4, para a ordem estimada  $n = 10$ , percebe-se que o modelo gerado pela aplicação do método de identificação proposto obteve um ajuste melhor na faixa de baixa frequência, conforme pode ser observado nos diagramas apresentados na Fig. 5.

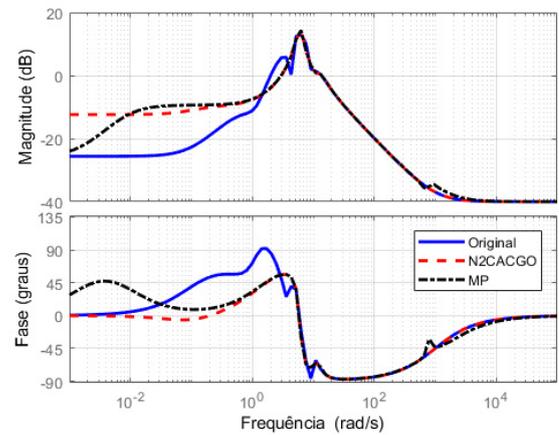


Fig. 4 – Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e identificados com ordem  $n = 10$  pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

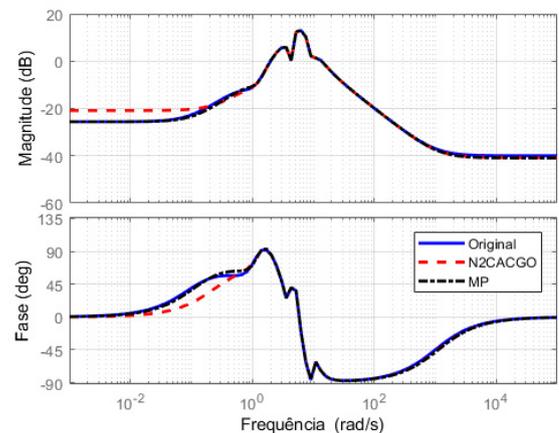


Fig. 5 – Diagramas de resposta em frequência dos modelos original e identificados de ordem  $n = 10$  pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

Na Tab. 2, são apresentados os erros de ajuste dos modelos identificados, considerando os indicadores definidos por (10) e (11). Utilizou-se um intervalo de tempo de 30 s para o cálculo do índice  $I_{ISE}$  e 100 valores de frequência espaçados de maneira logarítmica na faixa definida entre  $10^{-2}$  a  $10^3$  rad/s para o cálculo do índice  $I_F$ . Semelhante ao exemplo anterior, é possível concluir que o modelo identificado pelo método proposto está mais bem ajustado de acordo com os critérios estabelecidos.

Tabela 2: Erros de ajuste dos modelos identificados.

Método	$I_{ISE}$	$I_F$
N2CACGO	0,0362	0,2248
MP	7,18e-04	0,0948

Na Fig. 6, são apresentados detalhes das respostas ao degrau unitário dos modelos original e identificados pelos dois métodos. Analogamente ao que ocorreu no exemplo anterior, percebe-se que o modelo obtido pelo método N2CACGO na sua forma original possui erro em regime permanente na resposta ao degrau unitário em relação à do modelo original. Já as respostas do modelo original e do identificado, por meio da abordagem proposta, convergem para o mesmo valor (0,0524), o que difere do modelo obtido pelo método N2CACGO, que estabiliza em 0,0903.

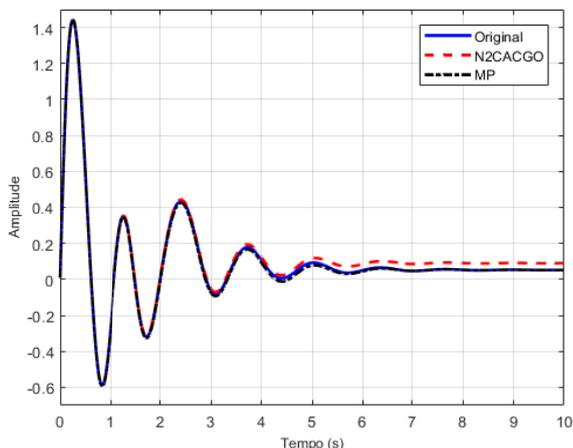


Fig. 6 – Respostas ao degrau unitário do modelo original e dos identificados pelos métodos N2CACGO e proposto (MP).

### 4.3 Motor Elétrico

Em [12], os métodos para identificação de modelos bi-próprios e estritamente próprios de um sistema físico, baseados no ajuste da resposta em frequência calculada, respectivamente apresentados em [7] e [8], são aplicados na modelagem de um motor DC (Fig. 7). A aplicação das técnicas apresentaram bons resultados. Os modelos identificados foram estáveis, mas de fase não-mínima. Neste exemplo, propõe-se encontrar um modelo estável e de fase mínima, por meio da aplicação da abordagem proposta. Ressalta-se que por se tratar de um sistema real, estão presentes efeitos de não linearidades e ruídos decorrentes do processo de aquisição de dados.



Fig. 7 – Motor DC.

O sistema empregado foi fabricado pela Quanser e consiste em um motor DC, instrumentado com um *encoder*, que é alimentado por um amplificador linear. O sistema pode ser controlado usando um computador externo, equipado com uma placa de aquisição de dados. Este possui um

microcontrolador que possibilita medir as saídas do *encoder* e aplicar tensões ao amplificador linear. Além disso, contém um *software* que permite o controle do motor em tempo real. A entrada do sistema corresponde à tensão em *volts* aplicada ao motor e a saída à velocidade angular em *rad/s* do rotor, medida por meio do *encoder*.

Para gerar os dados temporais de entrada e de saída, a serem utilizados na identificação do modelo, foram inseridos sinais senoidais na entrada do motor e medidas as respostas [12]. Foram realizadas 100 medições, variando-se a frequência dos sinais de 0,10 até 10 Hz, que correspondem, respectivamente, aos valores mínimo e máximo permitidos pelo software. O tempo total de aquisição para cada medição foi de 10 s, com um período de amostragem de 0,01s. A resposta em frequência do sistema foi calculada por meio da aplicação da FFT nos sinais temporais medidos da entrada e da saída no sistema [9], possibilitando a identificação de modelos bi-próprios [7] e estritamente próprios [8], de ordens  $n = 1$  a 3.

Levando-se em consideração o custo de ajuste e a complexidade matemática do modelo como critérios de escolha, o modelo selecionado inicialmente em [11] foi o de ordem 1 que apresentou o menor custo. Entretanto, ao validar o modelo identificado com diferentes sinais de entrada (senoidal, triangular e quadrada), percebeu-se que a resposta do modelo apresentava um *undershooting* inicial nas transições de nível da onda quadrada, comportamento que difere da saída medida e que pode ser observado na Fig. 8.

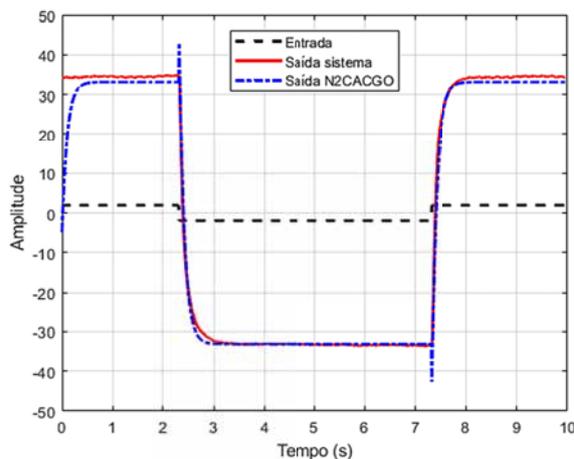


Fig. 8 – Resposta temporal para entrada na forma de onda quadrada com 0,10 Hz.

A FT do modelo de primeira ordem apresentou um zero no semiplano  $s$  direito, o que segundo o teorema em [13], é condição necessária e suficiente para a saída de um sistema estável exibir *undershooting* inicial para uma entrada em degrau. Em seguida, adotou-se então o modelo de ordem 2, que também possui um zero no semiplano  $s$  direito, satisfazendo as condições do teorema em [13] e, portanto, apresentando também um *undershooting* inicial. Porém a amplitude do *undershooting* do modelo de ordem 2 é muito menor que o do modelo de ordem 1. Isso é explicado em [14] pelo fato do zero no sistema de segunda ordem estar mais afastado do eixo imaginário que o no sistema de primeira ordem.

Considere agora a aplicação da técnica proposta neste trabalho para a obtenção de modelos estritamente próprios e bipróticos, a partir dos dados de resposta em frequência calculados. Na Fig. 8 é apresentada a resposta do sistema real a uma excitação na forma de onda quadrada, na frequência de 0,10 Hz, que é a mais baixa disponível para medição no sistema utilizado neste exemplo. Considerando que o valor da constante  $K$  corresponde ao valor aproximado da razão entre a amplitude do sinal de saída pelo da entrada, conforme (4) e (5), definiu-se por avaliação gráfica o valor de  $K$  como sendo igual a 17,2. Como especificado em (6), o valor da razão  $K$  também está relacionado à razão entre os coeficientes  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  do modelo estimado. Com isto, foram identificados modelos de ordens 1, 2 e 3.

Na Tabela 3 são apresentados os custos obtidos para os modelos identificados pelo método proposto (MP), utilizando o índice  $I_{ISE}$  e considerando o valor de  $K = 17,2$ , para modelos de fase não-mínima (FNM) e para os modelos de fase mínima (FM). O método proposto retornou valores de custos menores quando as soluções não ficaram restritas a modelos estáveis e de fase mínima. Se o critério para a definição do valor de  $K$  for a redução do custo em uma faixa de frequência  $\omega$  de interesse, ao invés da razão entre as amplitudes dos sinais de saída e de entrada do sistema, é possível encontrar outro valor de  $K$  que reduza os valores de custo calculados.

Tabela 3: Custos dos modelos identificados ( $I_{ISE}$ ).

Método	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
MP FNM	9,5300	11,9621	9,0716
MP FM	21,9421	15,9488	9,3663

O método proposto obteve modelos estáveis e de fase mínima nas três ordens especificadas, conforme coeficientes apresentados na Tabela A.3 do Apêndice. O modelo selecionado foi o de ordem  $n = 3$ , por apresentar custo relativamente mais baixo, inclusive com valor semelhante em ordem de grandeza aos de fase não-mínima. Na Fig. 9 é apresentado o diagrama da resposta em frequência calculada do sistema real e o do modelo identificado de ordem 3 com o MP.

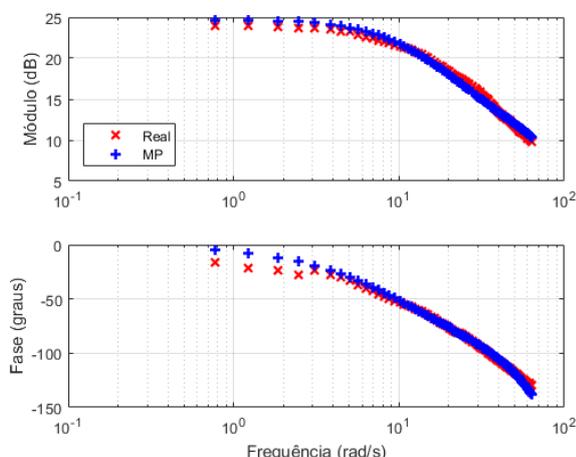


Fig. 9 – Diagrama de resposta em frequência do sistema real e do modelo identificado de ordem 3.

Para fins de validação, o modelo obtido foi submetido aos três tipos de entrada disponíveis no sistema real, onda

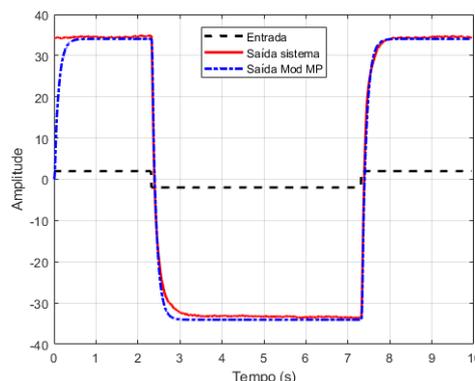
quadrada, senoidal e triangular. Na Fig. 10 são apresentadas as respostas do sistema real e do modelo identificado de ordem 3 pelo método proposto para as entradas citadas em diferentes valores de frequências na faixa de operação do motor. Percebe-se que as respostas dos modelos identificados possuem comportamentos semelhantes à do sistema real e, em particular, a resposta relativa à entrada na forma de onda quadrada não apresenta *undershooting*.

## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

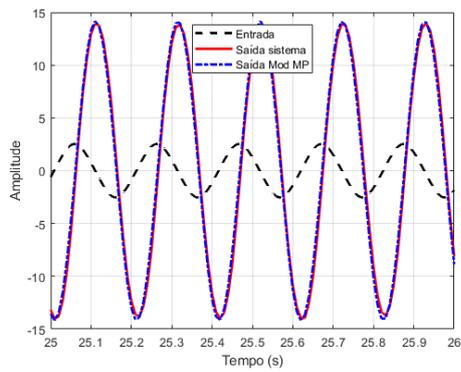
Nos exemplos apresentados, os métodos de identificação propostos em [6] e [7], além da abordagem proposta, foram testados em dois modelos acadêmicos e em um sistema real. Nos dois primeiros exemplos, os modelos identificados pelo método proposto ficaram mais bem ajustados, de acordo com os critérios estabelecidos, e as respostas a uma entrada degrau unitário não apresentaram erro de estado estacionário. Os modelos do motor elétrico identificados por meio do método N2CACGO [12], na sua concepção original, apresentaram bons resultados para entradas senoidais e triangulares. Entretanto, para onda quadrada, as respostas dos modelos identificados apresentaram *undershooting*. Esse detalhe provavelmente poderia ser resolvido se, durante o processo de identificação, o sistema fosse excitado com um espectro de frequências maior, abrangendo frequências mais elevadas, o que não foi possível devido às limitações de software. Contudo, o método proposto neste artigo possibilitou a identificação de modelos estáveis e de fase mínima, ou seja, cujas respostas possuem comportamento semelhante à saída do sistema real para entradas do tipo onda quadrada, mesmo com a limitação na faixa de resposta em frequência disponível.

## 6. CONCLUSÃO

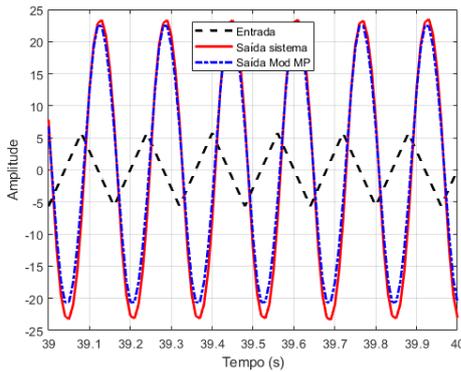
Neste trabalho, foi proposta um aperfeiçoamento para o método de identificação no domínio da frequência denominado N2CACGO. Trata-se de uma nova abordagem, onde a resposta temporal do sistema a uma entrada do tipo degrau unitário foi utilizada na formulação do método, visando reduzir o erro de regime permanente na resposta ao degrau e melhorar o ajuste do modelo identificado. Três exemplos foram empregados para evidenciar as vantagens relativas desta abordagem. Como foi observado, o método proposto pode ser uma alternativa para a obtenção de modelos estáveis e com fase mínima.



(a)



(b)



(c)

**Fig. 10** – Detalhes das respostas do sistema real e do modelo de ordem 3 identificado pelo método proposto: (a) Entrada na forma de onda quadrada com 0,10 Hz; (b) Entrada senoidal com 5 Hz; (c) Entrada triangular com 8 Hz.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LJUNG, L. Some classical and some new ideas for identification of linear systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 24:3-10, 2013.
- [2] AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas*. Editora UFMG, Belo Horizonte, 2007.
- [3] LJUNG, L. *System identification: theory for the user*. Second Edition. Prentice Hall, 1997.
- [4] PINTELON, R. e SCHOUKENS, J. *System Identification: A Frequency Domain Approach*. Second edition, 2012.
- [5] PINTELON, R., GUILLAUME, P., ROLAIN, Y., SCHOUKENS, J. e VAN HAMME, H. Parametric identification of transfer functions in frequency domain – a survey. *IEEE Trans on Automatic Control*, 39(11):2245-2260, 1994.
- [6] LJUNG, L. e GLOVER, K. Frequency domain versus time domain methods in system identification. *Automatica*, 17(1):71-86, 1981.
- [7] ADES, R. e SILVEIRA, B. P. Identificação de sistemas por ajuste da resposta em frequência utilizando conjuntos geradores otimizados. XVI Congresso Brasileiro de Automática, Outubro 2006.
- [8] ADES, R., OLIVEIRA, M. A. e SILVEIRA, M. A. Identificação de sistemas por ajuste da resposta em frequência a partir de modelos estritamente próprios. VIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2007.
- [9] OLIVEIRA, M. A., ADES, R. e PELLANDA, P. C. Método iterativo de identificação de modelos dinâmicos multivariáveis no domínio da frequência a partir de sinais temporais. XIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente 2017.
- [10] ZHOU, K. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

- [11] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Prentice Hall, 5 edição, 2010.
- [12] SOUZA, D. H. B., OLIVEIRA, M. A., PELLANDA, P. C. e CUNHA, A. E. C. Identificação de modelo de motor DC utilizando método analítico de ajuste da resposta em frequência através de problema de otimização convexo. *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. DINCON, 2017.
- [13] DAMM, T. e MUHIRWA, L. N. Zero crossings, overshoot and initial undershoot in the step and impulse responses of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(7), 2014.
- [14] LAU, K., MIDDLETON, R. H. e BRASLAVSKY, J. H. Undershoot and settling time tradeoffs for nonminimum phase systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8), 2003

## APÊNDICES

**Tabela A.1:** Coeficientes dos modelos do exemplo acadêmico A.

Grau em s	FT original		N2CACGO		MP	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
$s^{10}$	1,00	1,00	--	--	--	--
$s^9$	38,44	31,89	--	--	--	--
$s^8$	690,83	636,37	--	--	--	--
$s^7$	7528,50	7906,66	--	--	--	--
$s^6$	55089,84	75049,45	0,99	1,00	0,99	1,00
$s^5$	278018,72	480278,87	33,88	27,33	33,91	27,37
$s^4$	962378,46	2462532,02	498,45	473,85	499,97	475,15
$s^3$	2128947,04	8016756,98	3.214,26	3951,81	3.231,10	3965,75
$s^2$	2560186,33	21479650,90	4.305,48	2.6824,15	4.357,69	2.6971,46
$s^1$	539227,24	26131516,41	370,27	3.4275,85	687,14	3.4759,11
$s^0$	66040,77	38338682,29	817,39	6.7714,50	120,23	6.9797,34

**Tabela A.2:** Coeficientes dos modelos do exemplo acadêmico B.

Grau em s	FT original		N2CACGO		MP	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
$s^{12}$	0,01	1,00	--	--	--	--
$s^{11}$	10,37	37,45	--	--	--	--
$s^{10}$	378,98	795,36	0,009	1,00	0,008	1,00
$s^9$	7350,51	11597,79	10,23	21,08	10,23	20,94
$s^8$	94748,69	125052,67	209,99	373,39	208,42	368,68
$s^7$	892408,88	1044548,89	3135,37	3829,69	3090,96	3751,56
$s^6$	6284133,92	6727079,43	26737,42	33756,06	25976,96	32785,13
$s^5$	30492915,99	34011680,53	216428,68	196026,96	210251,97	187897,63
$s^4$	105111409,60	132128137,95	674798,99	979718,52	612649,30	925675,36
$s^3$	302569065,13	386992730,88	3237383,06	3208384,47	3074869,19	2963153,17
$s^2$	305434267,72	793137694,86	3903594,62	8754379,61	2970135,63	7838200,04
$s^1$	274579427,27	981613366,70	4841943,52	12321230,10	3977658,61	10327977,49
$s^0$	24695956,70	471555200,98	1051411,10	11636192,50	436994,07	8344152,49

**Tabela A.3:** Coeficientes dos modelos identificados do motor.

Grau em s	Ordem 1		Ordem 2		Ordem 3	
	Num	Den	Num	Den	Num	Den
$s^3$	--	--	--	--	--	1
$s^2$	--	--	--	1,00	--	87,30
$s^1$	--	1,00	--	66,70	--	7941,38
$s^0$	145,52	8,46	13101,54	761,71	1232608,87	71663,30